Maths XP **Contrôle n°2 du Vendredi 18/10/2024** Thiaude P.
55 minutes **Calculatrice autorisée en mode examen** (total sur 20 pts)

<u>Exercice 1</u> [3 points]
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $6|19^n - 1$.

<u>Exercice 2</u> [4 points]
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $4|n^2(n^2 + 3)$.

<u>Exercice 3</u> [4 points]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = 10n^2 - 10n + 8$, $b_n = 5n - 3$ et on note r_n le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de a_n par b_n.
Déterminer r_n en fonction de n en distinguant, si nécessaire, plusieurs cas.

<u>Exercice 4</u> [4 points]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 3n^2 + 6n + 10$ et $b_n = n^2 + n + 8$.
Un élève affirme : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv b_n \ [n + 2]$ ».
Si cette affirmation est fausse trouver un contre-exemple, sinon la démontrer.

<u>Exercice 5</u> [3 points]
Déterminer le plus petit entier naturel non nul d tel que : $13^d \equiv 1 \ [10]$.
En déduire le chiffre des unités de 13^{175}.

<u>Exercice 6</u> [2 points]
Un élève dit : « pour tout entier relatif a, on a : $1 + a + a^2 + a^3 + a^4|a^5 - 1$».
Si cette affirmation est fausse trouver un contre-exemple, sinon la démontrer.

__Corrigé__
__Exercice 1__
Démontrer que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a : $\boldsymbol{6|19^n - 1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $19^n \equiv (19 - 3 \times 6)^n \equiv 1^n \equiv 1\ [6]$
On a : $19^n \equiv 1\ [6]$, autrement dit : $6|19^n - 1$.
Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, 6|19^n - 1}$.

__Autre méthode__ On peut effectuer une démonstration par récurrence mais c'est beaucoup plus long.

__Exercice 2__
Démontrer que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{4|n^2(n^2+3)}$.

__Méthode 1__ (conseillé)
On procède par disjonction de cas suivant le reste modulo 4 de n :

• 1er cas : $\boldsymbol{n \equiv 0\ [4]}$
$n^2(n^2+3) \equiv 0^2(0^2+3) \equiv 0\ [4]$
On a : $n^2(n^2+3) \equiv 0\ [4]$ autrement dit $4|n^2(n^2+3)$.

• 2ème cas : $\boldsymbol{n \equiv 1\ [4]}$
$n^2(n^2+3) \equiv 1^2(1^2+3) \equiv 1 \times 4 \equiv 4 \equiv 4 - 4 \equiv 0\ [4]$
On a : $n^2(n^2+3) \equiv 0\ [4]$ autrement dit $4|n^2(n^2+3)$.

• 3ème cas : $\boldsymbol{n \equiv 2\ [4]}$
$n^2(n^2+3) \equiv 2^2(2^2+3) \equiv 4 \times 7 \equiv 0\ [4]$
On a : $n^2(n^2+3) \equiv 0\ [4]$ autrement dit $4|n^2(n^2+3)$.

• 4ème cas : $\boldsymbol{n \equiv 3\ [4]}$
$n^2(n^2+3) \equiv 3^2(3^2+3) \equiv 9 \times 12 \equiv (9 - 2 \times 4) \times (12 - 3 \times 4) \equiv 1 \times 0 \equiv 0\ [4]$
On a : $n^2(n^2+3) \equiv 0\ [4]$ autrement dit $4|n^2(n^2+3)$.

__Conclusion__
$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{Z}, 4|n^2(n^2+3)}$

__Autre méthode__
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
On procède par disjonction de cas suivant la parité de n.

• si $\boldsymbol{n}$ est pair
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$, alors : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ par conséquent $4|n^2$
$4|n^2$ donc 4 divise tout multiple de n^2 en particulier : $4|n^2(n^2+3)$.

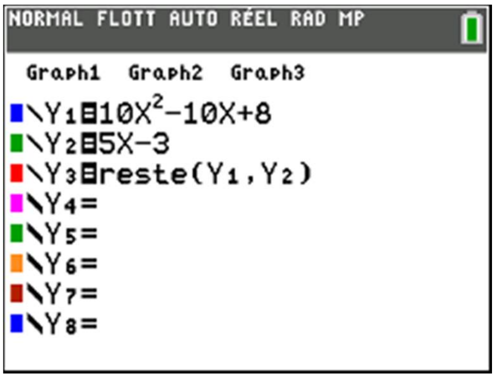
• si $\boldsymbol{n}$ est impair
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$,
alors : $n^2 + 3 = (2k+1)^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 1 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 = 4(k^2 + k + 1)$
par conséquent $4|n^2 + 3$
$4|n^2 + 3$ donc 4 divise tout multiple de $n^2 + 3$ en particulier : $4|n^2(n^2+3)$.

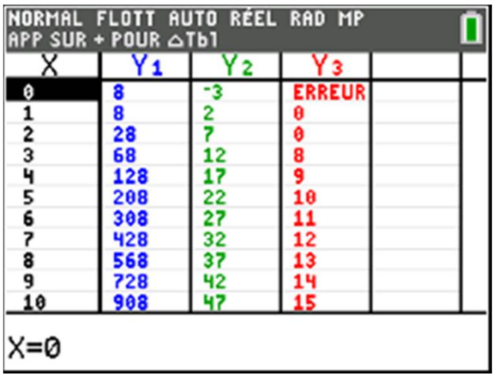
__Conclusion__
$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{Z}, 4|n^2(n^2+3)}$

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 10n^2 - 10n + 8$, $b_n = 5n - 3$, r_n est le reste de la division euclidienne de a_n par b_n.
Déterminer r_n en fonction de n en distinguant si nécessaire plusieurs cas.

À l'aide de la calculatrice on peut conjecturer que : si $n \geqslant 3$ alors $r_n = n + 5$.




NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ∆Tbl

X	Y1	Y2	Y3
0	8	-3	ERREUR
1	8	2	0
2	28	7	0
3	68	12	8
4	128	17	9
5	208	22	10
6	308	27	11
7	428	32	12
8	568	37	13
9	728	42	14
10	908	47	15

X=0

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = 10n^2 - 10n + 8 = 10n^2 - 10n + 8 - (n+5) + n + 5 = 10n^2 - 11n + 3 + n + 5$$

$$= (2n-1)(5n-3) + n + 5 = (2n-1)b_n + n + 5$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (2n-1)b_n + n + 5$.
Regardons à quelle condition sur n on a $0 \leq n + 5 < b_n$ c'est-à-dire $0 \leqslant n + 5 < 5n - 3$:
— la première relation d'ordre est toujours vérifiée
— pour la deuxième on a les équivalences : $n + 5 < 5n - 3 < 5 + 3 < 5n - n \Leftrightarrow 8 < 4n \Leftrightarrow n > 2$
Résumons : pour $n \geqslant 3$, on a : $a_n = (2n-1)b_n + n + 5$ avec $0 \leqslant n + 5 < b_n$, donc : $r_n = n + 5$.

Les cas $n \in \{0; 1; 2\}$ doivent être étudiés séparément :
• Si $n = 0$, alors $a_0 = 10(0)^2 - 10(0) + 8 = 8$, $b_0 = 5(0) - 3 = -3$.
On a : $8 = (-2) \times (-3) + 2$ avec $0 \leqslant 2 < |-3|$ donc $r_0 = 2$.

• Si $n = 1$, alors : $a_1 = 10(1)^2 - 10(1) + 8 = 8$, $1 = 5(1) - 3 = 2$.
On a : $8 = 4 \times 2 + 0$ avec $0 \leqslant 0 < 2$ donc $r_1 = 0$.

• Si $n = 2$, alors : $a_2 = 10(2)^2 - 10(2) + 8 = 40 - 20 + 8 = 28$, $b_2 = 5(2) - 3 = 7$.
On a : $28 = 4 \times 7 + 0$ avec $0 \leqslant 0 < 7$ donc $r_2 = 0$.

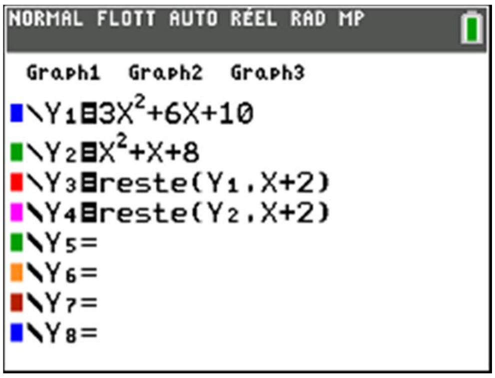
Conclusion

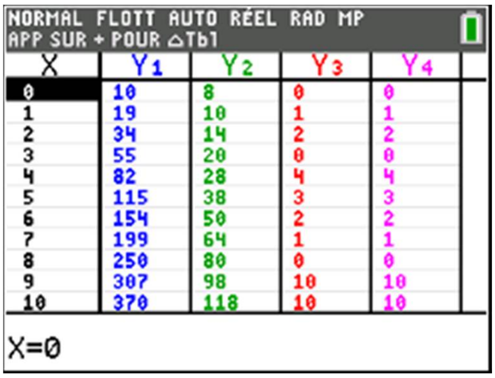
$r_0 = 2$, $r_1 = r_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$ on a : $r_n = n + 5$.

Exercice 4

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3n^2 + 6n + 10$, $b_n = n^2 + n + 8$. Un élève : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv b_n\ [n+2]$ ».
Si cette affirmation est fausse, trouver un contre-exemple, sinon la démontrer.

Recherche avec la calculatrice :




NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ∆Tbl

X	Y1	Y2	Y3	Y4
0	10	8	0	0
1	19	10	1	1
2	34	14	2	2
3	55	20	0	0
4	82	28	4	4
5	115	38	3	3
6	154	50	2	2
7	199	64	1	1
8	250	80	0	0
9	307	98	10	10
10	370	118	10	10

X=0

Il semble que la réponse soit affirmative…

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n - b_n = 3n^2 + 6n + 10 - (n^2 + n + 8) = 3n^2 + 6n + 10 - n^2 - n - 8 = 2n^2 + 5n + 2$$
$$= (n+2)(2n+1)$$

On a : $a_n - b_n = (n+2)(2n+1)$ donc $n + 2 | a_n - b_n$ autrement dit : $a_n \equiv b_n\ [n+2]$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a_n} \equiv \boldsymbol{b_n}\ [\boldsymbol{n+2}]$ **donc l'affirmation de cet élève est exacte.**

<u>**Exercice 5**</u> **[4 points]**

Déterminer le plus petit entier naturel non nul $\boldsymbol{d}$ tel que : $\mathbf{13}^{\boldsymbol{d}} \equiv \mathbf{1}\ [\mathbf{10}]$. En déduire le chiffre des unités de $\mathbf{13^{175}}$.

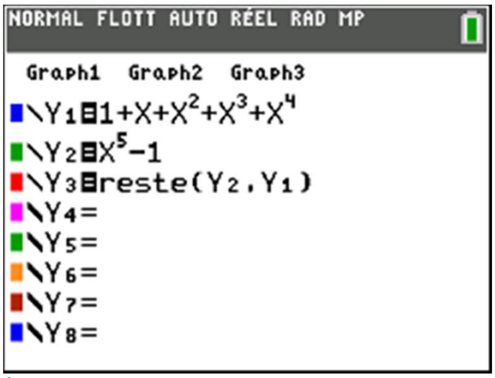
$13^1 = 13 \equiv 13 - 10 \equiv 3\ [10]$
$13^2 \equiv 3^2 \equiv 9\ [10]$
$13^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 27 - 2 \times 10 \equiv 7\ [10]$
$13^4 \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 81 - 8 \times 10 \equiv 1\ [10]$
donc : $\boldsymbol{d = 4}$.
La division euclidienne de 175 par 4 s'écrit : $175 = 43 \times 4 + 3$ avec $0 \leqslant 3 < 4$.
On a : $13^{175} = 13^{43\times4+3} = 13^{43\times4} \times 13^3 = (13^4)^{43} \times 13^3 \equiv 1^{43} \times 7 \equiv 1 \times 7 \equiv 7\ [10]$
donc **le chiffre des unités de $\mathbf{13^{175}}$ est 7**.

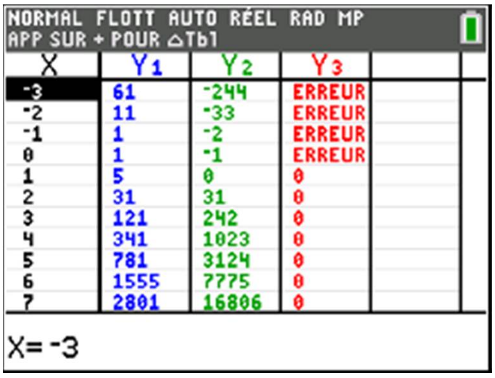
Le sujet pouvait accélérer la résolution en se contentant de trouver $d' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $13^{d'} \equiv \pm 1\ [10]$.
$13^1 = 13 \equiv 13 - 10 \equiv 3\,[10]$ $\qquad$ $13^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 9 - 10 \equiv -1\ [10]$
donc $d' = 2$.
La division euclidienne de 175 par 2 donne $175 = 87 \times 2 + 1$.
On a : $13^{175} = 13^{87\times2+1} = 13^{87\times2} \times 13^1 = (13^2)^{87} \times 13 \equiv (-1)^{87} \times 3 \equiv (-1) \times 3 \equiv -3 \equiv 7\ [10]$
donc **le chiffre des unités de $\mathbf{13^{175}}$ est 7**.

<u>**Exercice 6**</u>

Un élève dit : « pour tout entier relatif $\boldsymbol{a}$, on a : $\mathbf{1} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{a}^4 | \boldsymbol{a}^5 - \mathbf{1}$».
Si cette affirmation est fausse, trouver un contre-exemple, sinon la démontrer.

Recherche à l'aide de la calculatrice :





À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que, pour $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la réponse est positive mais ne permet pas d'analyse pour $a \leqslant 0$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$, on a :

$$(1 + a + a^2 + a^3 + a^4)(1 - a) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 - a - a^2 - a^3 - a^4 - a^5 = 1 - a^5$$

Résumons : $(1 + a + a^2 + a^3 + a^4)(1 - a) = 1 - a^5$.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $1 - a^5 = k(1 + a + a^2 + a^3 + a^4)$, à savoir $k = 1 - a$, donc
$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 | 1 - a^5$, autrement dit : $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 | -(1 - a^5)$ ou encore :
$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 | a^5 - 1$.

<u>Conclusion</u>
$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}, \mathbf{1} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{a}^4 | \boldsymbol{a}^5 - \mathbf{1}$ **donc l'affirmation est vraie.**

L'égalité $(1+a+a^2+a^3+a^4)(1-a)=1-a^5$ $(*)$ peut s'obtenir à travaillant dans $\mathbb{R}$ et en remarquant que : $1+a+a^2+a^3+a^4$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison a.
Si $a \neq 1$, la formule de la somme donne :

$$1+a+a^2+a^3+a^4=1\times\frac{1-a^5}{1-a}$$

d'où : $(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)(1-a)=1-a^5$.
Cette égalité reste vraie lorsque $a=1$: d'une part $(1+1+1^2+1^3+1^4+1^5)(1-1)=0$ et d'autre part : $1-1^5=1-1=0$.
Il suffit ensuite, sans autre explication sur la copie, de justifier l'égalité $(*)$ par développement.